

Sesión de Preparación de Olimpiada Matemática.

16 de Diciembre de 2016. Fernando Mayoral.
Desigualdades (y Polinomios y otras funciones) (I).

1.-Algunas desigualdades básicas.

1) $x^2 \geq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. La igualdad sólo se cumple para $x = 0$.

2) (Desigualdad triangular) Si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

La igualdad se cumple si, y sólo si, $xy \geq 0$.

3) Medias: aritmética (A), geométrica (G), armónica (H) y cuadrática (Q): Si $a, b > 0$,

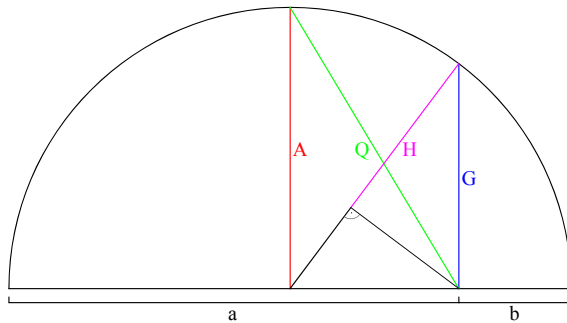
$$A(a, b) = \frac{a+b}{2}, \quad G(a, b) = \sqrt{ab}, \quad H(a, b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, \quad Q(a, b) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Entonces

$$\min\{a, b\} \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq \max\{a, b\}$$

y las igualdades se cumplen si y sólo si $a = b$.

Las desigualdades entre las medias tienen la siguiente visualización que también cuánto se parecen y cuánto se diferencian en función de lo parecidos o diferentes que sean a y b .



Cada una de las desigualdades involucradas en $H \leq G \leq A \leq Q$ son equivalentes entre sí y equivalentes a la desigualdad $(a-b)^2 \geq 0 \equiv 2ab \leq a^2 + b^2$ (y que la igualdad se cumple sólo, y exclusivamente, para $a = b$). También puede considerarse una interpretación geométrica en términos de áreas y perímetros de rectángulos.

- puesto que ab es el área de un rectángulo de lados a y b (perímetro = $2(a+b)$) y $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ es el área del cuadrado que tiene dicho perímetro (lado = $\frac{a+b}{2}$), la desigualdad

$$H \leq A \equiv \frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2} \equiv ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

nos dice que el área del rectángulo es menor o igual que la del cuadrado del mismo perímetro. Y la igualdad sólo se obtiene en el caso del cuadrado $a = b$. Es decir, *de entre todos los rectángulos con un perímetro dado, el que tiene mayor área es el cuadrado.*

- Puesto que $2(a + b)$ es el perímetro de un rectángulo de lados a y b (área = ab) y el perímetro del cuadrado que tiene área ab (lado = \sqrt{ab}) es $4\sqrt{ab}$ la desigualdad

$$G \leq A \equiv \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \equiv 4\sqrt{ab} \leq 2(a+b),$$

nos dice que el perímetro del del rectángulo es menor o igual que la cuadrado del mismo área. Y la igualdad sólo se obtiene en el caso del cuadrado $a = b$. Es decir, *de entre todos los rectángulos con un área dada, el que tiene menor perímetro es el cuadrado.*

4) (Reordenamiento) Si $a \leq b$ y $x \leq y$, entonces

$$ax + by \geq ay + bx.$$

Ejercicio 1.

- a) Demuestra la desigualdad triangular y que $|x - y| \geq ||x| - |y||$ para $x, y \in \mathbb{R}$.
- b) Demuestra la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica. Interpreta geoméricamente la desigualdad en términos de áreas. ¿Cuándo se verifica la igualdad?
- c) Demuestra e interpreta la desigualdad del reordenamiento.

.....

- a) Basta aplicar la desigualdad triangular a $x = (x - y) + y$ y a $y = (y - x) + x$.
- b) Basta desarrollar $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Interpretación geométrica en términos de áreas: Si se considera el cuadrado de lado $a + b$, dentro de él se pueden colocar, sin que se solapen, 4 rectángulos de lados a y b . Sólo se verifica la igualdad cuando $a = b$ en cuyo caso tenemos 4 cuadrados de lado $a = b$ que cubren completamente el cuadrado de lado $a + b$.
- c) La demostración es inmediata: Decir que $ax + by \geq ay + bx$ es equivalente a decir que $b(y - x) \geq a(y - x)$. Esto último es cierto puesto que $y - x \geq 0$ y $b \geq a$.

Ejercicio 2. (Completando cuadrados) Demuestra las siguientes desigualdades:

- a) $x^2 + xy + y^2 \geq 0$.
- b) $x^2 - xy + y^2 \geq 0$.
- c) Si $x > 0$ entonces $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Demuestra que la suma $x + y$ con $xy = 1, x > 0$, es mínima cuando $x = y = 1$. Interpreta geoméricamente el resultado.
- d) Si $0 < x < 2$ entonces $x(2 - x) \leq 1$. Demuestra que el producto xy con $x + y = 2, x, y > 0$, es máximo cuando $x = y = 1$. Intepreta geoméricamente el resultado.

.....

- a) Aunque la desigualdad se podría reducir a una desigualdad con el polinomio en una variable $p(t) = t^2 + t + 1$ lo hacemos directamente en dos variables

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0.$$

Obviamente la igualdad sólo se da para $x = y = 0$.

- b) Se puede hacer de forma análoga al apartado anterior.

- c) Puesto que $x > 0$ tanto x como $1/x$ pueden tomarse como cuadrados (de números reales),

$$x + \frac{1}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2 \geq 2$$

y la igualdad sólo se alcanza para $x = \frac{1}{x} = 1$.

Interpretación geométrica: De entre todos los rectángulos con área igual a 1 el que tiene menor perímetro es el cuadrado.

- d) Si $0 < x < 2$ entonces

$$x(2-x) = -(x^2 - 2x) = -((x-1)^2 - 1) = 1 - (x-1)^2 \leq 1.$$

Interpretación geométrica: De entre todos los rectángulos con perímetro dado, el que tiene mayor área es el cuadrado.

Ejercicio 3. Demuestra las siguientes desigualdades:

- a) Si $0 \leq x \leq y \leq 1$ entonces $0 \leq xy^2 - x^2y \leq \frac{1}{4}$.

- b) Si $x, y > 0$ entonces $\sqrt{\frac{x^2}{y}} + \sqrt{\frac{y^2}{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

- a) La primera desigualdad es clara, $xy^2 - x^2y = xy(y-x) \geq 0$. Para la segunda desigualdad, puesto que $0 \leq y \leq 1$ se tiene que $0 \leq y^2 \leq y$ y por tanto

$$xy^2 - x^2y \leq xy^2 - x^2y^2 = x(1-x)y^2 \leq x(1-x) = -(x^2 - x) = -\left(\left[x - \frac{1}{2}\right]^2 - \frac{1}{4}\right) \leq \frac{1}{4}.$$

- b) Si $x, y > 0$, basta aplicar la desigualdad del reordenamiento con

$$(x, y) \text{ y } \left(\frac{1}{\sqrt{y}}, \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Ejercicio 4. (OME-1984) Dados dos números reales positivos p, q tales que $p + q = 1$, y sabiendo que todo par de números reales x, y cumple $(x - y)^2 \geq 0$, se pide demostrar

a) si $x, y > 0$, entonces $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

b) $\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

c) si $p, q > 0$ y $p+q=1$, entonces $\left(p+\frac{1}{p}\right)^2 + \left(q+\frac{1}{q}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.

.....

a) Medias aritmética y geométrica.

b) Medias aritmética y cuadrática.

c) Si $p+q=1$ entonces $pq \leq \frac{1}{4}$ (el máximo del producto se alcanza cuando ambos son iguales).
Puesto que

$$p + \frac{1}{p} + q + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{pq} \geq 5$$

elevando al cuadrado y suamnado con la desigualdad $\left(p + \frac{1}{p} - q - \frac{1}{q}\right)^2 \geq 0$ se obtiene el resultado. También puede obtenerse aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

2.- La desigualdad de Cauchy-Schwarz.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz establece que para dos conjuntos de n números reales, a_1, a_2, \dots, a_n y b_1, b_2, \dots, b_n se verifica que

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2).$$

La igualdad se cumple si y sólo si las n -uplas (a_1, a_2, \dots, a_n) y (b_1, b_2, \dots, b_n) son una múltiplo de la otra.

Podemos suponer que alguno de los $a_k \neq 0$. Puede demostrarse la desigualdad de Cauchy-Schwarz estudiando la gráfica del polinomio de segundo grado dado por

$$p(x) = \sum_{k=1}^n (a_kx + b_k)^2.$$

Puesto que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$0 \leq p(x) = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)x + \sum_{k=1}^n b_k^2,$$

la gráfica/parábola $y = p(x) = Ax^2 + Bx + C$ está por encima del eje OX , o es tangente a él. Por tanto, el discriminante

$$\Delta = B^2 - 4AC \leq 0 \iff \left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right).$$

El caso $B^2 = 4AC$, que se corresponde con que la parábola sea tangente a OX , es equivalente a que se verifique la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz y se da cuando $p(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}$. Es decir, cuando existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$b_k = -x_0 a_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

o lo que es lo mismo (b_1, b_2, \dots, b_n) es un múltiplo de (a_1, a_2, \dots, a_n) .

Ejercicio 5. (OME-1971) Si $0 < p, 0 < q$ y $p + q < 1$, demostrar que $(px + qy)^2 \leq px^2 + qy^2$.

.....
 La desigualdad puede obtenerse mediante lo siguiente

$$\frac{p^2x^2 + q^2y^2 + 2pqxy}{px^2 + qy^2} = p + q - \frac{pq(x-y)^2}{px^2 + qy^2} \leq p + q < 1$$

.....
 Sin embargo puede obtenerse de manera más natural buscando aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$(px + qy)^2 = (x\sqrt{p}\sqrt{p} + y\sqrt{q}\sqrt{q})^2 \leq (x^2p + y^2q)(p + q) < \dots$$

Ejercicio 6. Demostrar que si a, b, x, y son números reales y $a, b > 0$ entonces

$$\frac{(x+y)^2}{a+b} \leq \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}.$$

.....
 Esta desigualdad se puede reducir a la desigualdad de Cauchy-Schwarz sin más que considerar lo siguiente:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = \left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{b}}\right)^2.$$

Aplicando la desigualdad de C-S tenemos

$$(x+y)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{a}}\sqrt{a} + \frac{y}{\sqrt{b}}\sqrt{b}\right)^2 \leq \left[\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{b}}\right)^2\right] (\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}).$$

Ejercicio 7. (OME-1980) Demostrar que si a_1, a_2, \dots, a_n son números reales positivos, entonces

$$(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

¿Cuándo es válida la igualdad?

.....
 Basta aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz a n -plas apropiadas.

Ejercicio 8. Demuestra que

$$\frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ca} + \frac{c^2}{2c^2 + ab} \leq 1$$

para todos los números reales positivos a, b, c .

.....
Basta usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Ejercicio 9. Deducir de la desigualdad de Cauchy-Schwarz la **desigualdad entre la media aritmética y la media cuadrática**: Si a_1, a_2, \dots, a_n son números reales positivos se verifica que

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

3.- Desigualdades entre Medias.

Ya hemos considerado antes, e interpretado, las medias de dos números reales positivos. Dados n números reales positivos a_1, a_2, \dots, a_n suelen considerarse las siguientes medias:

- **Media aritmética.** $A = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$.
- **Media geométrica.** $G = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$.
- **Media armónica.** $H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$.
- **Media cuadrática.** $Q = \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}$.

Las mismas desigualdades que vimos para las medias entre dos números se tienen en el caso de n números:

1) $\min_k \{a_k\} \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq \max_k \{a_k\}$,

$$\min_k \{a_k\} \leq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}} \leq \max_k \{a_k\}.$$

2) Las igualdades se cumplen si y sólo si $a_1 = \dots = a_n$.

Ejercicio 10. (OME-1975) Probar que si el producto de n números reales y positivos es igual a 1, su suma es mayor o igual que n .

.....
Se obtiene fácilmente a partir de la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Ejercicio 11. (OME-1978) Se dan los números A_1, A_2, \dots, A_n . Demostrar, sin necesidad de calcular derivadas que el valor de X que hace mínima la suma

$$(X - A_1)^2 + \dots + (X - A_n)^2$$

es precisamente la media aritmética de los números dados.

.....
Basta completar cuadrados en el desarrollo

$$0 \leq (X - A_1)^2 + \dots + (X - A_n)^2 = nX^2 - \left(\sum_k A_k \right) X + \sum_k A_k^2.$$

Ejercicio 12. Sean $x, y, z > 0$ tales que $x + y + z = 1$. Demuestra que $xy + yz + zx \leq \frac{1}{3}$. ¿Qué desigualdad se deduce sin la restricción $x + y + z = 1$?

.....
Usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.
